

Ecuaciones Diferenciales II Examen V

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Ecuaciones Diferenciales II Examen V

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Granada, 2026

Asignatura Ecuaciones Diferenciales II.

Curso Académico 2024/2025.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Rafael Ortega Ríos.

Descripción Primera prueba de clase.

Fecha 31 de Marzo de 2025.

Ejercicio 1. Dado un campo continuo $X : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(t, x) \mapsto X(t, x)$, y dado $\varepsilon > 0$, demuestra que las fórmulas que siguen definen una función:

$$x_\varepsilon : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \longmapsto \begin{cases} (0, 1), & t \in [0, \varepsilon], \\ x_\varepsilon(t - \varepsilon) + \varepsilon X(t - \varepsilon, x_\varepsilon(t - \varepsilon)), & t \in]\varepsilon, +\infty[. \end{cases}$$

¿Se puede asegurar que esta función es continua?

Ejercicio 2. Demuestra que el problema de valores iniciales

$$\dot{x}_i = \sqrt{1 - t^2}(1 - f(x_1, x_2))x_i, \quad x_i(0) = \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2$$

admite una solución definida en $] -1, 1[$, donde:

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & \min(1, x_1^2 + x_2^2). \end{array}$$

Ejercicio 3. Para cada $n \geq 1$ se considera la función

$$x_n(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!}, \quad t \in [-2, 2].$$

Encuentra una sucesión de números $\{\varepsilon_n\}_{n \geq 1}$ convergente a cero para la que se cumpla

$$\left| x_n(t) - 1 - \int_0^t x_n(s) ds \right| \leq \varepsilon_n \quad \forall t \in [-2, 2].$$

Ejercicio 4. Se supone que $x : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua que cumple, para cada $t \in [-1, 1]$,

$$x(t) = 2 + t \int_0^t x(s) ds.$$

Encuentra un problema de valores iniciales para una ecuación diferencial de segundo orden del que $x(t)$ es solución. Deduce entonces que la ecuación integral admite a lo sumo una solución.

Ejercicio 5. Nos dan una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n \geq 0}$, $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, que cumplen

I) $|f_n(0)| \leq 7$, para cada $n = 0, 1, 2, \dots$

II) $\{f_n\}_{n \geq 0}$ es equicontinua.

¿Se puede asegurar que existe una sucesión parcial de $\{f_n\}_{n \geq 0}$ que converge uniformemente en $[0, 1]$?